

No.2 1次独立と1次従属

この回のゴール

- 1次結合・1次独立・1次従属の定義を述べられる.
- $\mathbb{R}^m$ のベクトルの1次独立性を, 連立方程式・ランク・行列式で判定できる.
- 多項式や関数の1次独立性を, 定義に戻って判定できる.
- 「1次従属 $\iff$ どれかが他の1次結合で書ける」を説明できる.

以下, V をベクトル空間とする.

1. 1次結合

定義 1 1次結合

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ と実数 $c_1, \dots, c_k$ を使って

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k$$

と表されるベクトルを, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ の **1次結合** (線形結合) という. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合全体の集合を $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ と書く.

例 1

$\mathbb{R}^3$ で $\mathbf{a}_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = {}^t(0, 1, 0)$ とすると, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \{{}^t(s, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ で, これは xy 平面である. 1本のベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ なら, $\langle \mathbf{a} \rangle$ は原点を通り $\mathbf{a}$ 方向の直線である.

注意

「 $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合で書けるか」は, $\mathbb{R}^m$ では連立一次方程式 $c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$, つまり $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k) \mathbf{c} = \mathbf{b}$ が解をもつかどうかの問題である. 第2章の道具がそのまま使える.

2. 1次独立と1次従属

定義 2 1次独立・1次従属

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ について,

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が成り立つとき, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ は **1次独立** (線形独立) であるという. 1次独立でないとき, つまり

$$c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \text{ を満たす, どれかは } 0 \text{ でない } c_1, \dots, c_k \text{ が存在する}$$

とき, **1次従属** (線形従属) であるという. このような式を, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ の間の **1次関係** という.

定義の読み方

$c_1 = \cdots = c_k = 0$ とすれば, どんなベクトルでも $c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ になる (自明な1次関係). 1次独立とは, $\mathbf{0}$ を作る方法がその自明なやり方しかないということである.

例 2

- (a) $\mathbb{R}^2$ で $\mathbf{a}_1 = {}^t(1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = {}^t(2, 4)$ は1次従属. $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ という1次関係がある.
 (b) $\mathbb{R}^2$ で $\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = {}^t(0, 1)$ は1次独立. $c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 = {}^t(c_1, c_2) = \mathbf{0}$ なら $c_1 = c_2 = 0$.
 (c) $\mathbf{0}$ を含む組は必ず1次従属. たとえば $1 \cdot \mathbf{0} + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.
 (d) 1本のベクトル $\mathbf{a}$ は, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ なら1次独立 (No.1 定理1 (7) より $c\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow c = 0$).

コラム: 図形で見る1次独立

$\mathbb{R}^3$ で, 2本のベクトルが1次従属 $\iff$ 同じ直線上にある. 3本のベクトルが1次従属 $\iff$ 同じ平面上にある (原点を通る平面). 1次独立とは, 「どの1本も, 残りが作る直線や平面からはみ出している」こと, つまり本当に新しい方向を持っていることである.

3. 1次従属の言い換え

定理 1

$k \geq 2$ のとき, 次は同値である.

- (a) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ は1次従属である.
 (b) ある $\mathbf{a}_i$ が, 残りの $k-1$ 本のベクトルの1次結合で表される.

【証明】(a) $\Rightarrow$ (b): 1次関係 $c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ で $c_i \neq 0$ とする. $c_i \mathbf{a}_i$ 以外を移項して $\frac{1}{c_i}$ 倍すると

$$\mathbf{a}_i = -\frac{c_1}{c_i} \mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i} \mathbf{a}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} \mathbf{a}_{i+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_i} \mathbf{a}_k.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): $\mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} d_j \mathbf{a}_j$ なら, $\sum_{j \neq i} d_j \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ は $\mathbf{a}_i$ の係数が $-1 \neq 0$ の1次関係. $\square$

定理 2 1次独立なら表し方は1通り

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が1次独立で, $\mathbf{b} = c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = d_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + d_k \mathbf{a}_k$ ならば, $c_1 = d_1, \dots, c_k = d_k$.

【証明】2つの式を引くと $(c_1 - d_1) \mathbf{a}_1 + \cdots + (c_k - d_k) \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. 1次独立なので, すべての係数が0. $\square$

定理 3 1次独立な組にベクトルを付け加える

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ は1次独立とし, $\mathbf{b} \in V$ とする.

- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ が1次従属ならば, $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$.
 (2) 言いかえると, $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ ならば, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ は1次独立.

【証明】(1) 1次関係 $c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k + c \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (どれかの係数は0でない) をとる. もし $c = 0$ なら $c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ で, 1次独立性から $c_1 = \cdots = c_k = 0$ となり, 係数がすべて0になって矛盾. よって $c \neq 0$ で, $\mathbf{b} = -\frac{c_1}{c} \mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{c_k}{c} \mathbf{a}_k$. (2) は (1) の対偶. $\square$

定理3は, No.3 で基底を作るときの道具になる. 「独立な組に, まだ作れないベクトルを足しても独立の

まま」と覚えておこう。

定理 4 一部分も 1 次独立

1 次独立な組から何本か取り除いた組も 1 次独立である。言いかえると、1 次従属な組に何本か付け加えた組も 1 次従属である。

【証明】 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1 次独立で、 $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ ($j < k$) とする。これは $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_j\mathbf{a}_j + 0\mathbf{a}_{j+1} + \dots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ と同じなので、 $c_1 = \dots = c_j = 0$ 。□

■ 4. $\mathbb{R}^m$ での判定法

$\mathbb{R}^m$ のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を並べた $m \times n$ 行列を $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ とする。 $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = A\mathbf{c}$ なので、1 次独立性は「同次方程式 $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の解が $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ だけか」という問題になる。

定理 5 $\mathbb{R}^m$ での判定法

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ とする。

- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が 1 次独立 $\iff A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ だけ $\iff \text{rank } A = n$.
- (2) 特に $n = m$ (正方行列) のとき: 1 次独立 $\iff \det A \neq 0 \iff A$ は正則.
- (3) $n > m$ なら, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は必ず 1 次従属. ($\mathbb{R}^m$ に 1 次独立なベクトルは高々 m 本.)

【証明】 (1) は第 2 章 No.3 定理 1. (2) は第 2 章 No.3 定理 5 と第 3 章 No.2 定理 3. (3) は第 2 章 No.3 定理 2 (式が未知数より少ない同次方程式は自明でない解をもつ)。□

例題 1

$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は 1 次独立か。1 次従属なら 1 次関係を 1 つ求めよ。

【解答】 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}, \textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } A = 2 < 3$ なので 1 次従属。 $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の解は $c_1 = c_3$, $c_2 = -2c_3$. $c_3 = 1$ とし $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

1 次関係の読み取り

行基本変形をしても $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の解は変わらない (第 2 章 No.1 定理 1). だから簡約階段行列の列の間の関係が、そのまま元のベクトルの間の関係になる。上の例では、簡約後の第 3 列 $= -1 \times (\text{第 1 列}) + 2 \times (\text{第 2 列})$ なので、元でも $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$.

■ 5. 多項式や関数の1次独立

$\mathbb{R}^m$ 以外では、定義に戻って考える.

例題 2

$\mathbb{R}[x]_2$ において, $f_1 = 1 + x$, $f_2 = x + x^2$, $f_3 = 1 - x^2$ は1次独立か.

【解答】 $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$ (多項式として 0) とすると,

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 - c_3)x^2 = 0.$$

多項式が 0 とは, すべての係数が 0 ということなので $c_1 + c_3 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, $c_2 - c_3 = 0$. これは $c_3 = t$ とおくと $c_1 = -t$, $c_2 = t$ という自明でない解をもつ. $t = 1$ として $-f_1 + f_2 + f_3 = 0$ なので, 1次従属.

注意

多項式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ を係数の列ベクトル ${}^t(a_0, a_1, a_2)$ と思えば, 例題 2 は $\mathbb{R}^3$ の問題と同じになる. この「係数を並べる」対応は No.3 で「座標」として正式に扱う.

例題 3

関数の空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ において, $\sin x$ と $\cos x$ は1次独立であることを示せ.

【解答】 $c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$ がすべての x で成り立つとする (関数として 0). $x = 0$ を代入すると $c_2 = 0$. $x = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $c_1 = 0$. よって1次独立.

注意

関数として 0 とは「すべての x で値が 0」のこと. だから好きな x を代入して条件を取り出してよい. 逆に, 特定の x で 0 になるだけでは関数として 0 ではない.

■ 練習問題

1. 次のベクトルの組は1次独立か. 1次従属なら1次関係を1つ求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^3$ の4本のベクトルは必ず1次従属である. その理由を説明せよ.

$$3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が1次独立となる } a \text{ の条件を求めよ.}$$

4. $\mathbb{R}[x]_2$ において, $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ は1次独立であることを示せ.

5. $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ において, 次の関数の組が1次独立であることを示せ.

$$(1) 1, x, x^2 \quad (2) e^x, e^{2x}$$

6. u, v, w が1次独立のとき, $u + v$, $v + w$, $w + u$ も1次独立であることを示せ.

7. (考えてみよう) u, v, w が1次独立のとき, $u-v, v-w, w-u$ は1次独立か.

■ 練習問題の解答

1. (1) 並べた行列の行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ なので1次独立 (定理5 (2)).

(2) 行列式は0で1次従属. 第3のベクトルは第1と第2の和なので, $a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}, \textcircled{3} - \textcircled{1} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2つめの矢印では, ④を使って第2列を掃き出し, 残りの行を零行にした.) ランク $2 < 3$ で1次従属. $c_1 = 2c_3, c_2 = -c_3$ より $2a_1 - a_2 + a_3 = 0$.

2. 定理5 (3) より, $\mathbb{R}^3$ で1次独立なベクトルは高々3本. (4本を並べた 3×4 行列のランクは3以下で, 4にはなれない.)

3. 並べた行列は第1章 No.5 例題1の行列そのもの (対称行列なので転置しても同じ) で, 行列式は $-(a-1)^2(a+2)$. よって1次独立 $\iff a \neq 1$ かつ $a \neq -2$.

4. $c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2) = 0$ とすると $c_1 + c_3 = 0, c_1 + c_2 = 0, c_2 + c_3 = 0$. 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ なので, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ だけ.

5. (1) $c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0$ がすべての x で成り立つとする. $x=0$ で $c_1 = 0$. $x=1, x=-1$ を代入して $c_2 + c_3 = 0, -c_2 + c_3 = 0$ より $c_2 = c_3 = 0$.

(2) $c_1e^x + c_2e^{2x} = 0$ がすべての x で成り立つとする. $x=0$ で $c_1 + c_2 = 0$. $x = \log 2$ で $2c_1 + 4c_2 = 0$. この2式から $c_1 = c_2 = 0$.

6. $c_1(u+v) + c_2(v+w) + c_3(w+u) = 0$ とすると $(c_1+c_3)u + (c_1+c_2)v + (c_2+c_3)w = 0$. u, v, w が1次独立なので $c_1+c_3 = c_1+c_2 = c_2+c_3 = 0$. これは練習問題4と同じ方程式で, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

7. 1次独立ではない. $(u-v) + (v-w) + (w-u) = 0$ という自明でない1次関係がある. (係数の方程式 $c_1 - c_3 = 0, -c_1 + c_2 = 0, -c_2 + c_3 = 0$ の係数行列の行列式が0になる, と考えてもよい.)